1 - Développements**Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme**

Qu'est-ce qu'une somme ? Qu'est-ce qu'un produit ? : C'est l'opération que l'on fait en dernier qui est décisive

Somme ou produit ?

$$3a + 5$$

$$3x(2x+5)$$

$$(4x-3)(6x+5)$$

$$(4x+3)^2$$

$$25x^2-36$$

$$2(3x-2) + 4(5x+3)$$

11 - Produit du type $k(a + b)$ ou $k(a - b)$

Quels que soient les nombres k , a et b , on a : $k \times (a + b) = ka + kb$

$$k \times (a - b) = ka - kb$$

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction.

Lors d'un développement, il faut penser à réduire et ordonner les termes suivant les puissances décroissantes.

Exemples : $3(x + 2) = 3x + 6$

$$-2(1 - 4x) = -2 + 8x$$

$$= 8x - 2$$

$$(7 - x) \times 3x = 21x - 3x^2$$

$$= -3x^2 + 21x$$

$$(-5 + 2y)(-2x) = 10x - 4xy$$

$$= -4xy + 10x$$

12 - Produit du type $(a + b)(c + d)$

Quels que soient les nombres a , b , c et d , on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \quad (\text{« double distributivité »})$$

Exemple : $(x + 3)(5 - 4x) = 5x - 4x^2 + 15 - 12x$

$$= -4x^2 - 7x + 15$$

2 - Les identités remarquables**21 - Carré d'une somme**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(1^{ère} identité remarquable)

a^2 est le carré du premier terme

Le terme « $2ab$ » s'appelle le double produit.

b^2 est le carré du deuxième terme

Exemples : $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 6x + 4$
 $(5 + 2y)^2 = 4y^2 + 20y + 25$

Utilisation en calcul mental : $58^2 = (50 + 8)^2 = 2500 + 800 + 64 = 3364$

22 - Carré d'une différence

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	(2^{ème} identité remarquable)
-------------------------------	---

Exemples : $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
 $(-2x - 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

Utilisation en calcul mental : $99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

23 - Troisième identité remarquable

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	(3^{ème} identité remarquable)
------------------------------	---

Exemples : $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$
 $(10 - 3x)(10 + 3x) = 100 - 9x^2 = -9x^2 + 100$

Utilisation en calcul mental : $103 \times 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 10000 - 9 = 9991$

24 - Lorsque le développement est précédé d'un signe moins.

$A = 4(x + 7) - (2x + 4)(3x - 1)$ $A = 4x + 28 - (6x^2 - 2x + 12x - 4)$ $A = 4x + 28 - 6x^2 + 2x - 12x + 4$ $A = -6x^2 - 6x + 32$	<p><i>Lorsque le développement est précédé d'un signe moins, on ouvre une parenthèse et on effectue le développement dedans. On supprime ensuite les parenthèses.</i></p>
--	---

$B = -2(x + 3)(x - 3) - (-5x + 3)^2$ $B = -2(x^2 - 9) - (25x^2 - 30x + 9)$ $B = -2x^2 + 18 - 25x^2 + 30x - 9$ $B = -27x^2 + 30x + 9$

3 - Factorisation

Factoriser consiste à transformer une somme en un produit

Méthode : la factorisation consiste à transformer une somme (ou une différence) en un produit ;
pour cela il faut : - soit trouver un facteur commun ;
- soit trouver une identité remarquable.

C'est le procédé « inverse » du développement.

31 - Méthode 1 : on recherche un facteur commun aux différents termes de la somme. Cela peut être un nombre, une lettre remplaçant un nombre, une expression.

Exemples :

$$A = 4x + 12$$

4 est un facteur commun à 4x et à 12

$$A = 4 \times x + 4 \times 3$$

On fait apparaître le facteur commun et on l'entoure en rouge dans chaque terme.

$$A = 4 \times (x + 3)$$

On applique la règle de la distributivité (dans le sens de la factorisation)

$$A = 4(x + 3)$$

$$B = 5a^3 - 25a$$

$$B = 5a \times a^2 - 5a \times 5$$

$$B = 5a(a^2 - 5)$$

$$C = 12x^5 + 4x^2 - 2x$$

$$C = 2x \times 6x^4 + 2x \times 2x - 2x \times 1$$

$$C = 2x(6x^4 + 2x - 1)$$

$$D = (2x + 1)(7x - 3) + (2x + 1)(x + 2)$$

$$D = (2x + 1)[(7x - 3) + (x + 2)]$$

$$D = (2x + 1)(7x - 3 + x + 2)$$

$$D = (2x + 1)(8x - 1)$$

$$E = (5x - 1)(3x - 7) - (5x - 1)(5x - 3)$$

$$E = (5x - 1)[(3x - 7) - (5x - 3)]$$

$$E = (5x - 1)(3x - 7 - 5x + 3)$$

$$E = (5x - 1)(-2x - 4)$$

Exercice 1: Factoriser

$$A = 5(x + 5) + 5(x - 2) = 5[(x + 5) + (x - 2)] = 5(x + 5 + x - 2) = 5(2x + 3)$$

$$B = 3x - 8x = (3 - 8)x = -5x$$

$$C = 4(x + 2)x + 4x(3x + 5) = 4x[(x + 2) + (3x + 5)] = 4x(x + 2 + 3x + 5) = 4x(4x + 7)$$

$$D = (x + 5)(2x + 5) + (2x + 5)(3x - 8) = (2x + 5)[(x + 5) + (3x - 8)] = (2x + 5)(x + 5 + 3x - 8) = (2x + 5)(4x - 3)$$

$$E = 3(x + 1)(7 - 2x) + (7 - 2x)(2 + x) = (7 - 2x)(4x + 5)$$

$$F = 3(4x - 2)(x + 7) + 5(x + 7)(3x - 1) = (x + 7)(27x - 11)$$

Attention à quelques cas :

a) la soustraction :

$$A = 3(5x - 2) - 3(2x - 7) = 3[(5x - 2) - (2x - 7)] = 3(5x - 2 - 2x + 7) = 3(3x + 5)$$

b) le terme « sans facteur » :

$$B = (3x + 7)(x + 5) + (x + 5) = (3x + 7)(x + 5) + (x + 5) \times 1 = (x + 5)[(3x + 7) + 1] = (x + 5)(3x + 8)$$

c) le carré :

$$C = (x + 3)^2 + (2x + 5)(x + 3) = (x + 3)(x + 3) + (2x + 5)(x + 3) = (x + 3)[(x + 3) + (2x + 5)] \\ = (x + 3)(3x + 8)$$

d) Parfois le facteur commun est plus difficile à voir, il faut le faire apparaître :

$$D = (5x - 2)(3x - 1) + (10x - 4)(x + 1)$$

$$D = (5x - 2)(3x - 1) + 2(5x - 2)(x + 1)$$

$$D = (5x - 2)[(3x - 1) + 2(x + 1)]$$

$$D = (5x - 2)(3x - 1 + 2x + 2) = (5x - 2)(5x + 1)$$

$$E = (x - 3)(2x + 5) + 5(3 - x) = (x - 3)(2x + 5) + 5 \times (-1) \times (x - 3)$$

$$E = (x - 3)[(2x + 5) - 5]$$

$$E = (x - 3) \times 2x$$

$$E = 2x(x - 3)$$

Exercices : Factoriser

$$A = (6 - 4x)(x + 5) + 2(3 - 2x)(x - 8) = (3 - 2x)(4x - 6)$$

$$B = (4x - 1) - 3x(8x - 2) = (4x - 1)(1 - 6x)$$

$$C = (5 - x)(2x - 1) + 2(2x + 1)(x - 5) = (5 - x)(-2x + 2)$$

$$D = (2x + 3)^2 + 5(2x + 3) = (2x + 3)(2x + 8)$$

$$E = 2 + (3x + 1)^2 + 6x = (3x + 1)(3x + 3)$$

$$F = 2(3 - x)(x + 2) - 3(x + 2)(4 + x) = (x + 2)(-6 - 14x)$$

$$G = (2 - 3x)(6 + x) - 3(x - 1)(2 - 3x) = (2 - 3x)(-2x + 9)$$

$$H = (2x - 3)(7 + 5x) - (2x - 3) = (2x - 3)(6 + 5x)$$

$$I = (3 - 2x)(5 - x) - (3 - 2x)(7 - 4x) = (3 - 2x)(-2 + 3x)$$

e) Meilleure factorisation

Dans l'exercice 2, on a obtenu les factorisations suivantes :

$$D = (2x + 3)^2 + 5(2x + 3) = (2x + 3)(2x + 8) \text{ et } E = 2 + (3x + 1)^2 + 6x = (3x + 1)(3x + 3)$$

Ces factorisations sont correctes, mais on peut donner d'autres formes factorisées qui sont souvent considérées comme meilleures que celles qui sont ici proposées.

Pour D, on peut remarquer que le facteur $(2x + 8)$ peut s'écrire $2(x + 4)$. On a alors :

$$D = (2x + 3)[2(x + 4)] \text{ que l'on écrira en général : } \underline{\underline{2(2x + 3)(x + 4)}}$$

Pour E : $3x + 3 = 3(x + 1)$. On a alors $E = \underline{\underline{3(3x + 1)(x + 1)}}$

De même, dans G de l'exercice 2, on a obtenu : $G = (x + 2)(-5x - 6)$.

On peut remarquer que : $-5x - 6 = -(5x + 6)$. G peut alors s'écrire : $\underline{\underline{-(x + 2)(5x + 6)}}$

Dans toutes ces nouvelles factorisations, l'idée est, lorsque c'est possible, de factoriser "le plus possible", c'est à dire de rechercher dans chaque facteur d'éventuels facteurs communs afin que chacun des facteurs s'écrive avec les nombres les plus petits possible.

Exercice 3 : De la même manière, "améliorer" les formes factorisées suivantes :

$$(6x - 2)(5x + 7)$$

$$= 2(3x - 1)(5x + 7)$$

$$(4x + 8)(3x - 6)$$

$$= 12(x + 2)(x - 2)$$

$$(2x - 1)(-3x - 5)$$

$$= -(2x - 1)(3x + 5)$$

32 - Méthode 2 : on reconnaît une identité remarquable.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$F = x^2 + 10x + 25$$

$$F = x^2 + 10x + 5^2$$

$$F = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$$

$$F = (x + 5)^2$$

Cette expression ressemble à $a^2 + 2ab + b^2$ qui vaut $(a + b)^2$

a vaudrait x et b vaudrait 5 . Vérifions si $10x$ est le double produit $2ab$.

$10x$ est bien le double produit donc ...

$$G = 9x^2 - 24x + 16$$

$$G = (3x)^2 - 24x + 4^2$$

$$G = x^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2$$

$$G = (3x - 4)^2$$

Cette expression ressemble à $a^2 - 2ab + b^2$ qui vaut $(a - b)^2$

a vaudrait $3x$ et b vaudrait 4 . Vérifions si $24x$ est le double produit $2ab$.

$24x$ est bien le double produit donc ...

$$H = 9x^2 - 16$$

$$H = (3x)^2 - 4^2$$

$$H = (3x + 4)(3x - 4)$$

Cette expression ressemble à $a^2 - b^2$ qui vaut $(a + b)(a - b)$

a vaudrait $3x$ et b vaudrait 4 donc ...

Exercice 4 : Factoriser

$$A = 25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = (5x + 3)^2$$

$$B = x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x - 4)^2$$

$$C = (x + 5)^2 - 4 = (x + 5) - 2^2 = [(x + 5) - 2][(x + 5) + 2] = (x + 3)(x + 7)$$

$$D = (2x - 1)^2 - (3x + 5)^2 = [(2x - 1) - (3x + 5)][(2x - 1) + (3x + 5)] = (2x - 1 - 3x - 5)(2x - 1 + 3x + 5)$$

$$D = (-x - 6)(5x + 4)$$

Exercice de synthèse : Factoriser

<i>Exemples</i>	<i>Méthode</i>
$A = (2x + 1)(x - 2) + 6(2x + 1)$ $= (2x + 1)[(x - 2) + 6]$ $= (2x + 1)(x + 4)$	<p>On repère le facteur commun : $(2x + 1)$</p> <p>On le met en facteur et on regroupe les autres facteurs.</p>
$B = (x + 4)^2 - (1 - 5x)(x + 4)$ $= (x + 4)[(x + 4) - (1 - 5x)]$ $= (x + 4)[x + 4 - 1 + 5x]$ $= (x + 4)(6x + 3)$	<p>Même principe, attention au signe moins devant la parenthèse !</p>
$C = 4x^2 - 12x + 9$ $= (2x)^2 - 2 \times 3x \times 3 + 3^2$ $= (2x - 3)^2$	<p>On reconnaît la 2^{ème} identité remarquable :</p>
$D = (3x + 2)^2 - 25$ $= (3x + 2)^2 - 5^2$ $= \times$ $= (3x + 7)(3x - 3)$ $= 3(x + 7)(x - 1)$	<p>C'est une différence de deux carrés $a^2 - b^2$, cela se factorise en $(a + b)(a - b)$:</p> $(3x + 2) \rightarrow a$ $5 \rightarrow b$
$E = (x + 6)^2 - (2x + 1)^2$ $=$ $=$ $= (3x + 7)(-x + 5)$	<p>Différence de 2 carrés</p> $(x + 6) \rightarrow a$ $(2x + 1) \rightarrow b$